

Die Modulgruppe:

$$\Gamma := \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$$

der 2×2 -Matrizen über \mathbb{Z} mit Determinante 1 operiert auf der oberen Halbebene

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

Der Bahnenraum $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ ist eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und läßt sich durch Hinzunahme der parabolischen Fixpunkte $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ kompaktifizieren.

Für eine Untergruppe $\Delta < \Gamma$ von endlichem Index zerfällt die projektive Gerade in $r < \infty$ Spitzenklassen, so daß wir Δ einen Spitzenvektor :

$$S(\Delta) := [s_1, \dots, s_r] \in (\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))^r$$

als vollständiges Repräsentantensystem der Spitzenklassen zuordnen können und einen kompakten Bahnenraum $\Delta \backslash \mathbb{H} \cup \{s_1, \dots, s_r\}$ erhalten.

Zu jedem Stabilisator $\Delta(s_i)$ eines Repräsentanten $s_i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ mit Spitzenbreite $w_i := [\Gamma(s_i) : \Delta(s_i)]$ existieren Matrizen:

$$\begin{array}{lll} g_i \in \Gamma & \text{mit} & g_i \infty = s_i \quad \text{und} \quad g_i^{-1} \Delta(s_i) g_i \subset \Gamma(\infty) \quad \text{bzw.} \\ h_i \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) & \text{mit} & h_i \infty = s_i \quad \text{und} \quad h_i^{-1} \Delta(s_i) h_i = \Gamma(\infty) \end{array}$$

Jedem Repräsentanten s_i ordnen wir eine Eisensteinreihe zu:

$$E_i(z, s) := \sum_{\delta \in \Delta(s_i) \backslash \Delta} \mathrm{Im}(h_i^{-1} \delta z)^s,$$

die für $\mathrm{Re} s > 1$ absolut konvergiert und Δ -automorph ist.

Jede dieser Eisensteinreihen $E_i(z, s)$ besitzt eine Fourierentwicklung in der Spitze s_j für $1 \leq i, j \leq r$, deren konstante Terme:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(s) &= \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{\tilde{c} \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{\tilde{c}^{2s}} \sum_{d \bmod \tilde{c}} \sum_{\begin{pmatrix} * & * \\ \tilde{c} & d \end{pmatrix} \in h_i^{-1} \Delta h_j} 1 \\ &= \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{\tilde{c} \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{\tilde{c}^{2s}} \left| \left\{ \left[\begin{pmatrix} * & * \\ \tilde{c} & * \end{pmatrix} \right] \in \Gamma(\infty) \backslash h_i^{-1} \Delta h_j / \Gamma(\infty) \right\} \right|, \end{aligned}$$

in der Streumatrix $\Phi(\Delta, s) := (\varphi_{ij}(s))_{1 \leq i, j \leq r}$ zusammengefasst werden.

Für:

$$a_{ij}(\tilde{c}) := \left| \left\{ \left[\begin{pmatrix} * & * \\ \tilde{c} & * \end{pmatrix} \right] \in \Gamma(\infty) \backslash h_i^{-1} \Delta h_j / \Gamma(\infty) \right\} \right| \quad \text{mit } \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$b_{ij}(c) := \left| \left\{ \left[\begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix} \right] \in g_i^{-1} \Delta(s_i) g_i \backslash g_i^{-1} \Delta g_j / g_j^{-1} \Delta(s_j) g_j \right\} \right| \quad \text{mit } c \in \mathbb{N}$$

folgt:

$$\varphi_{ij}(s) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{\tilde{c} \in \mathbb{R}^+} \frac{a_{ij}(\tilde{c})}{\tilde{c}^{2s}} = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{c \in \mathbb{N}} \frac{b_{ij}(c)}{(w_i w_j)^s c^{2s}}$$